I segnali sinusoidali

I circuiti in c.a.

GRANDEZZ SINUSOIDALI

Per motivi di opportunità e comodità teorica e pratica è comodo ed utile conoscere il comportamento di un circuito sollecitato in ingresso da una tensione alternata sinusoidale.

La sinusoide è già stata oggetto di studio in matematica:
la sinusoide la si può immaginare generata da un vettore di ampiezza A che gira ad una velocità costante ω. L'angolo formato dal vettore rotante è quindi una funzione del tempo:
$\alpha(t) = \omega * t$ ➔ $A \operatorname{sen} \alpha = A \operatorname{sen} \omega t$ con ω [velocità angolare = angolo/ tempo]

definita la velocità angolare si possono introdurre altre due grandezze la frequenza ed il periodo sostituendo al generico angolo α l'angolo giro (2π) che viene compiuto in un tempo T (periodo)

$\omega = \alpha / t = 2\pi / T = 2\pi * f$

. Una **sinusoide** è caratterizzata da: **ampiezza** , **pulsazione** e **fase**.

-Valor massimo o ampiezza : ampiezza: è il massimo valore che la funzione assume durante un periodo; si distinguono il valor massimo positivo (A_{max+}) ed il valor minimo negativo (A_{max-}) La differenza tra valore massimo e valore minimo è il valore picco-picco.
E' utile considerare anche il Valore efficace ed il valore medio sul semiperiodo

- Pulsazione : ω è la velocità angolare prende il nome di PULSAZIONE si misura in [rad/sec] .
- Periodo T [sec] corrisponde al tempo necessario per compiere una rotazione completa,
- frequenza f [Hz] è il numero di rotazioni in un secondo.
- Fase di una sinusoide : rappresenta il ritardo o anticipo di una sinusoide rispetto ad un riferimento o ad un'altra sinusoide (differenza di fase) .

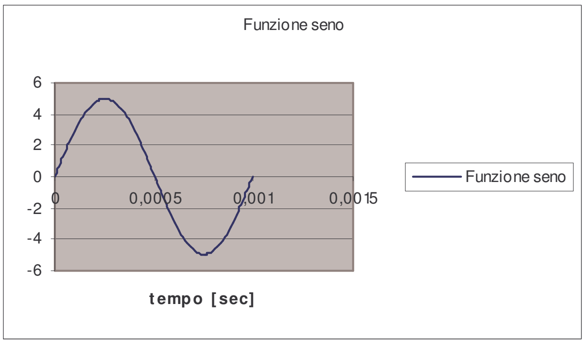
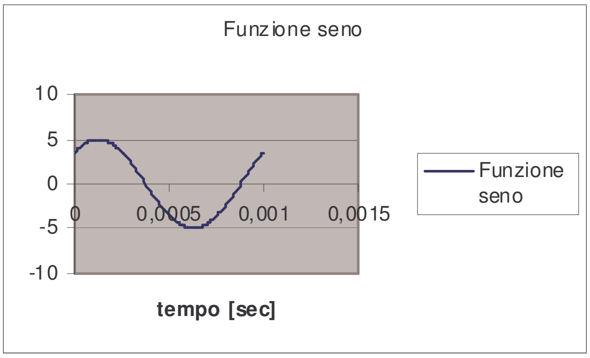
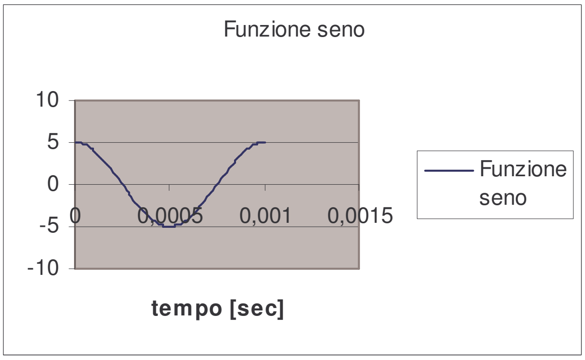
Sintesi:

Una tensione alternata sinusoidale è caratterizzata da

Ampiezza	E' dato dalla lunghezza del vettore che genera la sinusoide. Ha le dimensioni della grandezza fisica corrispondente: volt, ampere, ….	Valore massimo Valore picco picco Valore medio Valore efficace
Frequenza	Fornisce il numero di oscillazioni nell'unità di tempo. Si misura in [Hz]	Pulsazione [rad/sec] $\omega = 2\pi f$ Periodo [sec] $T = 1/f$
fase	Fornisce l'angolo del vettore generatore al tempo $t = 0$	La fase viene indicata in rad/sec [RAD]. Se la si vuole indicare in "gradi sessagesimali" [DEG] è necessario fare la trasformazione.

Esempi

$A(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = A_M \operatorname{sen}(2\pi f\, t + \alpha)$

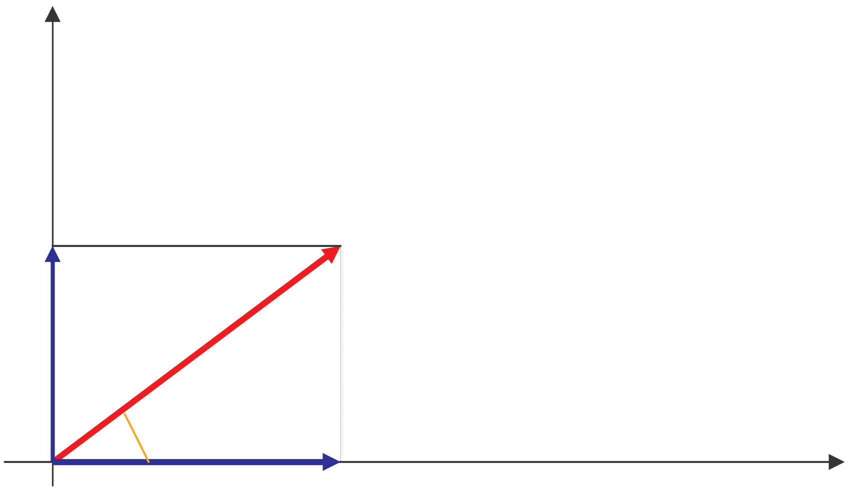
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A_M = 5$; f = 1 KHz; fase = 0</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A_M = 5$; f = 1 KHz; fase = 45</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A_M = 5$; f = 1 KHz; fase = 90</td></tr>
</table>

In ca valgono le stesse leggi studiate per le correnti continue; bisogna solo tener conto che le grandezze sono vettoriali e quindi c'è una maggiore complessità nei calcoli.

Nei casi che si prenderanno in esame in questo momento TUTTE le grandezze sono ISOFREQUENZIALI (cioè hanno la stessa frequenza).
Sono possibili diverse rappresentazioni delle grandezze vettoriali per poter fare più facilmente le operazioni tra grandezze.

rappresentazione complessa [1]: Ogni sinusoide è rappresentata da un vettore che è rappresentabile da una componente reale (asse x: ascissa) e da una componente immaginaria (asse y:ordinata)
Ogni vettore sarà del tipi a + j b . Con questa rappresentazione è possibile fare tutte le operazioni

Rappresentazione in modulo e fase: ogni vettore è rappresentato dal suo modulo (lunghezza) e dall'angolo formato con l'asse delle ascisse che costituisce il riferimento per gli angoli
Ogni vettore sarà rappresentato da due numeri: il modulo e la fase. In questo caso è possibile effettuare operazioni di moltiplicazione (prodotto dei moduli e somma delle fasi) e divisione (rapporto dei moduli e differenza delle fasi)



---

[1] I numeri detti immaginari sono introdotti per poter effettuare la radice di numeri negativi e costituiscono una nuova classe di numeri rispetto a quelli fin qui studiati:
In definitiva si possono avere le seguenti classi di numeri: interi, relativi, razionali, reali, immaginari ottenuti rispettivamente come estensione della classe precedente. [Ogni estensione è necessaria per poter effettuare operazioni altrimenti non definibili].

I numeri immaginari sono rappresentati sull'asse delle ordinate di un sistema cartesiano, in quanto l'asse delle ascisse è già un insieme denso (numeri reali).

Un numero complesso è costituito dalla somma di un numero reale e uno immaginario: Z = a + jb .
Il numero complesso viene rappresentato sul piano di Gauss ponendo la parte reale sulle ascisse e quella immaginaria sulle ordinate. Dunque un numero complesso è rappresentato da un vettore avente l'origine nel punto[0,0] e l'estremità nel punto di coordinate [a ; b] .
A tale numero complesso possiamo associare un vettore costruito nell' origine e con vertice nel punto di coordinate (a ; b).

Sintesi

Rappresentazione trigonometrica		$a(t) = A_M$ sen ($\omega t + \alpha$)
Rappresentazione vettoriale		Modulo 5 fase 45 = 5 <u>/45</u>
Rappresentazione simbolica	Forma binaria Forma trigonometrica Forma esponenziale	a + j b A*(cosa + j sen a) $A\ e^{ja}$

La rappresentazione dei vettori per mezzo dei numeri complessi è detta <u>rappresentazione simbolica</u>. I numeri complessi sono rappresentati su un piano cartesiano detto ***piano di Gauss*** , sulla cui ascissa vengono collocati i numeri reali , mentre sull'ordinata vengono collocati i numeri immaginari.
L'unità immaginaria "j" viene definita nel seguente modo:

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = j * j = -1$$

$$j^3 = J^2 * j = -j$$

$$j^4 = j^2 * j^2 = j$$

TRASFORMAZIONE DI NUMERI COMPLESSI IN MODULO E FASE E VICEVERSA

E' sempre possibile passare da una rappresentazione all'altra

I numeri complessi sono rappresentati sul piano detto di Gauss, che di fatto si sovrappone al piano cartesiano, la rappresentazione in modulo e fase fa riferimento ad una rappresentazione polare che prende come riferimento la semiretta orizzontale ed un vero positivo degli angoli (verso antiorario)

Modulo = la lunghezza del vettore = Zm
Fase = l'angolo che forma con il semiasse positivo reale = φ (lettera greca)

Dunque, per trasformare il numero complesso in modulo e fase si eseguono le seguenti operazioni:

$$Zm = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left[\frac{b}{a}\right]$$

Si ottiene dunque: Zm con fase φ

Al contrario per trasformare da modulo e fase in numero complesso si fa:

Parte reale (a) = Zm* cos φ
Parte immaginaria (b) = Zm* sen φ
Si ottiene dunque: Z = a + jb

ESEMPI DI TRASFORMAZIONI

Da numero complesso a modulo e fase:
Z = 3+j4

$$Zm = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = tg^{-1}\left[\frac{4}{3}\right] = 53.1$$

Dunque questo numero complesso può essere visto come modulo 5 con fase 53,1.

Da modulo e fase a numero complesso:
Modulo 7con fase 30
Parte reale (a) = 7*cos 30 = 6,06
Parte immaginaria (b) = 7*sen 30 = 3,5
Dunque questo valore espresso in modulo e fase lo possiamo vedere come il numero complesso:
Z = 6,06 + j3,5

Esempio
Modulo 5 fase 45
Componente reale ➔ 5 cos 45
Componente immaginaria ➔ 5 sen 45

Esempio
3 + j 4
Modulo: $\sqrt{3^2 + 4^2}$
Fase: tg^{-1} (4/3)

OPERAZIONI TRA GRANDEZZE SINUSOIDALI
[ipotesi ➔ segnali siano isofrequenziali (aventi la stessa frequenza)]

OPERAZIONI TRA GRANDEZZE RAPPRESENTATE IN FORMA TRIGONOMETRICA (rappresentazione temporale)
Graficamente: la somma (o differenza) va' eseguita per ogni istante;
Analiticamente: le operazioni vanno eseguite risolvendo l'equazione trigonometrica (che risulta molto semplice se le grandezze hanno la stessa frequenza …)

NB: ➔ si consiglia di svolgere in modulo e fase le moltiplicazioni e divisione, con i numeri complessi le addizioni e sottrazioni

OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI
La somma, si esegue in questo modo :

$3 + J4 - 2 - J = 1 - J3$

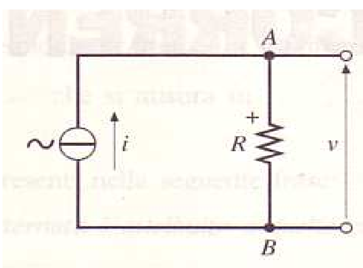
Analogamente si procede per le sottrazioni , eseguendo una somma algebrica tra numeri reali per ottenere la parte reale del risultato, e una somma algebrica di numeri complessi per ottenerne la parte immaginaria.
Per quanto riguarda la moltiplicazione , invece , forniamo il seguente caso :

$(5 + J3) (5 - J3) = 25 - J15 + J15 + 9 = 34$

questo particolare caso ci dà lo spunto per dimostrare che dato un numero complesso e coniugato il risultato è sempre un numero Reale.
Per eseguire una divisione tra grandezze sinusoidali possiamo fornire un nuovo esempio :
$5 / (2 - J3)$, in casi come questi l'unico metodo per la risoluzione è una Razionalizzazione .

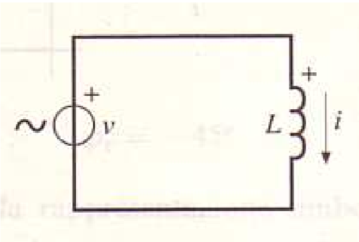
OPERAZIONI TRA GRANDEZZE RAPPRESENTATE IN MODULO E FASE
Prodotto: il modulo è dato dal prodotto dei moduli, la fase dalla soma delle fasi
Rapporto: il modulo è dato dal rapporto dei moduli, la fase è data dalla differenza delle fasi

ESEMPI



A lato è raffigurato un circuito puramente resistivo.
La formula principale è : $V = R * I$
In cc V ed I sono delle grandezze scalari
In ca V ed I sono delle grandezze vettoriali
In questo caso la tensione e la corrente sono in fase

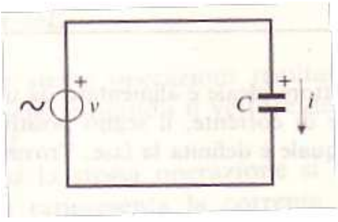
Questo è un circuito <u>puramente induttivo</u>.



L'induttanza L di misura in [Henry]
In cc è un corto circuito
Le formule per la risoluzione di questo circuito in c.a. sono:
$|V| = X_L * |I|$
$X_L = \omega * L$
$I = V / j * \omega * L$
X_L ➔ reattanza induttiva. [ohm]

La tensione è in anticipo rispetto alla corrente di 90 gradi.

Questo è un circuito <u>puramente capacitivo</u>.



La capacità C si misura in [farad]
In cc è un circuito aperto
Le formule per la risoluzione di questo circuito in c.a. sono:
$|V| = X_C * |I|$
$X_C = 1 / \omega * C$
$V = -j * X_C * I$
$I = V / - j * \omega * C$

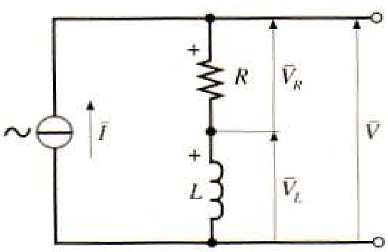
X_C ➔ reattanza capacitiva[ohm]

La corrente è in anticipo di 90 gradi rispetto alla tensione

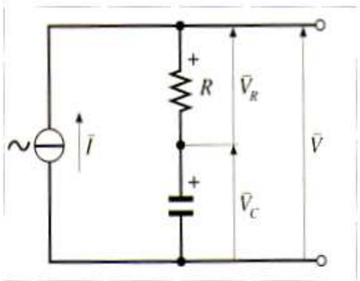
.

NOTA:
I resistori sono elementi DISSIPATIVI, gli induttori ed i condensatori sono elementi CONSERVATIVI, (rispetto all'energia fornita in forma elettrica) ma entrambi si oppongono al passaggio della corrente elettrica
(resistenza e reattanza misurano, quindi, l'opposizione dei componenti al passaggio della corrente ed entrambi si misurano in OHM
L'opposizione al passaggio della corrente di un circuito resistivo – reattivo è dato dalla IMPEDENZA Z [ohm]

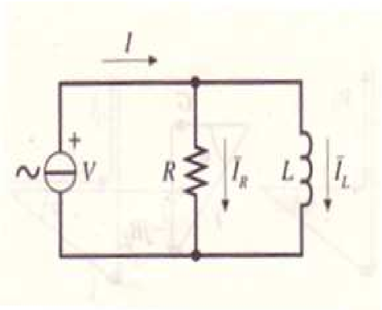
ESEMPI



A lato è raffigurato un <u>circuito R-L in serie</u>.
Le formule sono le seguenti :
$Z = R + J * X_L$
$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$
Z rappresenta l'**impedenza** , che è sempre data dalla somma di una resistenza e una reattanza.

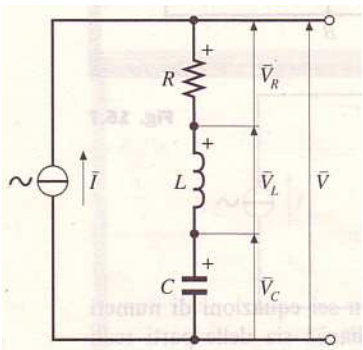


Questo è un circuito R-C in serie.
Ecco le formule :
$V_R = R * I$
$V_C = - J * X_C * I$
$I = Vg / Z$
$I = V / (R - J * X_C * I$
$Z = R - J * X_C$



Questo invece è un circuito R-L in parallelo.
Le formule sono :
$Z = R * (J * X_C) / R + J * X_C$
$I_L = V / J * X_L$
$I_R = V / R$
$I = I_L + I_R$

Ancora c'è il circuito R-C in parallelo.
Le formule sono
$V_{R1} = R1 * I$
$Vc = - J * X_C * I$
$Vab = Zab * I$
$Ic = Vab / - J * X_C$
$I = Vg / R - J * X_C$
$Zab = R (- J * X_C) / R - J * X_C$ da razionalizzare



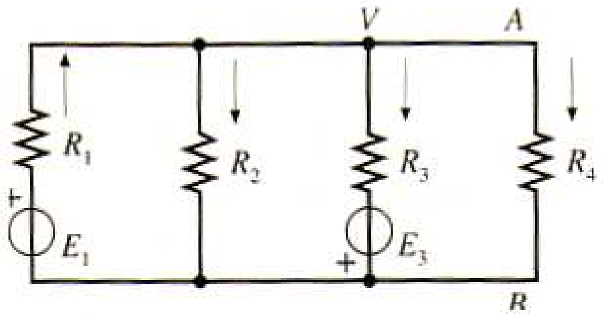
Infine abbiamo il circuito R-L-C in serie.
Eccone le formule :
$Z = R + J (X_L + X_C)$
$I = V / Z$
$V_R = R * I$
$V_L = X_L * I$
$V_C = X_C * I$

CONFRONTO TRA CIRCUITI IN TENSIONI CONTINUE ED ALTERNATE

Nei circuiti in continua il segnale graficamente è rappresentato da una linea continua , non esistono sfasamenti né parti immaginarie dei valori . In questi circuiti è di fondamentale importanza la **Legge di Ohm** :

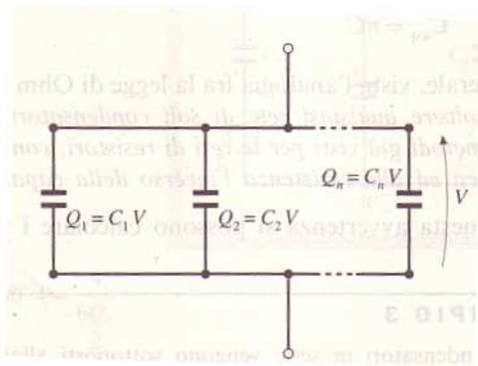
$V = R * I$ $\qquad$ $R = V / I$

Per la risoluzione di circuiti complessi in circuiti equivalenti come nel caso del circuito in figura dobbiamo trovare la Resistenza e il Generatore equivalente . Due resistenze si dicono <u>in serie</u> se sono attraversati dalla stessa corrente , mentre si dicono <u>in parallelo</u> se sono sottoposte alla stessa tensione . Per ottenere la Req. di due resistenze in serie basta una semplice somma mentre per la Req. di due resistori in parallelo si usa la formula :



R = (R1 * R2)/R1+R2.

Se il circuito ha un solo Generatore la risoluzione è molto più semplice , mentre per risolvere circuiti come questo possiamo utilizzare alcuni Teoremi come il Teorema di Thevenin, il Teorema di Millman, la sovrapposizione degli effetti, il metodo delle correnti di Maglia ecc.



Se invece avessimo dei condensatori, il metodo di risoluzione di una Capacità elettrica equivalente è esattamente l'inverso rispetto alle Resistenze:

ovvero la Ceq di due condensatori in serie è data dal prodotto fratto la somma delle capacità stesse , mentre due Capacità in parallelo hanno come Ceq la somma delle capacità.Ovviamente ci sono molti altri casi nei circuiti in continua , ma questi di cui abbiamo parlato sono di sicuro i più frequenti .

In tensione continua abbiamo un segnale che oscilla continuamente tra un valore massimo positivo ed un valore massimo negativo(Volts picco-picco). Il segnale generalmente è di forma sinusoidale . Vi sono diverse tipologie di componenti e di conseguenza di circuiti che andremo ad analizzare .

Analisi dei componenti

Componente	CC	AC		
Resistenza	I=V/R	I=V/R Tensione e corrente sono in fase	Componente dissipativo	R ➔ ohm
condensatore	Circuito aperto Carica del condensatore	Si oppone al passaggio della corrente➔ Reattanza capacitiva Xc = 1/wC Corrente in anticipo di 90 gradi sulla tensione $I = V/ -jXc$	Componente conservativo	C ➔ farad Xc ➔ ohm
Induttore	Corto circuito Transitorio di corrente	Si oppone al passaggio della corrente ➔ Reattanza induttiva X_L = wL Corrente in ritardo di 90° sulla tensione $I = V/jX_L$	Componente conservativo	L ➔ Henry X_L ➔ ohm
Nei circuiti RC o RL si definisce il concetto di impedenza Z (si misura in ohm)formata da una parte reale (resistenza) ed una parte immaginaria (la reattanza) che sfasa la corrente di 90 gradi in anticipo o in ritardo				Z ➔ ohm

Ulteriori considerazioni:
la reattanza capacitiva decresce all'aumentare della frequenza (leggere attentamente la formula Xc = 1/ωC e notare che la curva rappresentativa della Xc sul piano è asintotica agli assi cartesiani (provare a disegnare il grafico e verificare la presenza degli asintoti)

la reattanza induttiva $X_L = \omega L$ ha un andamento rettilineo sul piano cartesiano perché la formula rappresentativa (il modello matematico) è l'equazione di una retta nella variabile ω.

ESEMPIO

Dati Vr = 10 V Vc = 8 V R = 1 Kohm F = 5 KHz	***Cosa fare:*** Risolvere il circuito, cioè calcolare: I = ? Vg ? C = ?
Considerazioni: ▪ Vr e Vc sono sfasate di 90° perché sono tensioni su componenti che introducono rispettivamente sfasamento tensione corrente 0 (la resistenza) e sfasamento 90 ° (il condensatore. ▪ I due componenti sono in serie e quindi sono attraversati dalla stessa corrente	
Calcolo I (applicando la legge di Ohm sulla resistenza)	I = Vr/R = 10 / 1000 = 10 mA
Calcolo Xc (applicando la legge di Ohm sul condensatore)	Xc = Vc / I = 8 / 10 mA = 800 ohm
Calcolo Vg	$Vg = \sqrt{Vr^2 + Vc^2} = 12.8V \, \text{mod}\,ulo$ $\alpha = tg^{-1}\left[\frac{Vc}{Vr}\right] = -38°.6\,fase$ La tensione Vg può essere data anche in forma complessa: Vg = 10 – j 8 V
Calcolo del valore del condensatore Dalla relazione che definisce la reattanza capacitiva, Xc = 1/(ωC) , ricavando la formula inversa e ricordando che ω = 2π f	$C = \frac{1}{2\pi f Xc} = \frac{1}{2*\pi*5*10^3*800} = \frac{1}{10^4*\pi*8*10^2} =$ $= \frac{1}{\pi*8*10^6} = \frac{10^{-6}}{\pi*8} = 39.7*10^{-3}*10^{-6} = 39.7nF$
Conclusioni	• Corrente 10 mA (diamo a questa grandezza fase 0) • Xc = 800 ohm (ricordiamo che la reattanza capacitiva introduce uno sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione • Z = 1000 – j 800 ohm (in modulo e fase |Z| = 1.28 kohm, fase = -38.6) • Vg = 12.8 V con sfasamento di 38.6 gradi in ritardo rispetto alla tensione Vg • Vr e Vc sono sfasate tra loro di 90° e la loro somma vettoriale è Vg